

Modellierung der Instabilität von Strömungen über das Drehmomentgleichgewicht in der Wirbelhülle

Burkhard Voigt Hochschule Mannheim 1. März 2018

Turbulenz in Strömungen entsteht aus Wirbeln. Aus geometrischen Parametern der Wirbelhülle lassen sich die kritischen Reynoldszahlen von Plattenströmung und Rohrströmung ermitteln. Die Hysterese der Instabilität wird begründet.

Störung der laminaren Rohrströmung durch Wirbel

Ein Fluid mit der Dichte ρ und der dynamischen Viskosität η bewegt sich in einem Rohr mit dem Radius r_0 von links nach rechts (Abb. 1). Die Rohrströmung ist laminar.

Mit der Druckdifferenz p pro Länge l gilt das parabelförmige Geschwindigkeitsprofil nach Hagen-Poiseuille:

$$c(r) = c_{max} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad \text{mit} \quad c_{max} = \frac{p}{l} \cdot \frac{r_0^2}{4\eta} \quad (1) \quad [\text{Lit. Budo}] \quad [\text{Lit. Eck}]$$

An der Rohrwand rollt ein kleiner Wirbel und bewirkt eine Störung der laminaren Rohrströmung. Der Übergangsbereich zwischen Wirbel und laminarer Rohrströmung wird im folgenden **Wirbelhülle** genannt. Es wird in dieser hier vorliegenden Arbeit gezeigt, dass die Wirbelhülle bei großen Geschwindigkeiten instabil ist. Die Ursache ist ein sich örtlich ändernder Krümmungsradius in einem Fluidelement der Wirbelhülle. Das entspricht aber einer variablen Zentrifugalkraft und daraus folgend einem Zentrifugal-Drehmoment. Bei großen Geschwindigkeiten wird das Zentrifugal-Drehmoment größer als das Drehmoment der viskosen Reibkraft. Es folgen Instabilität und Turbulenz.

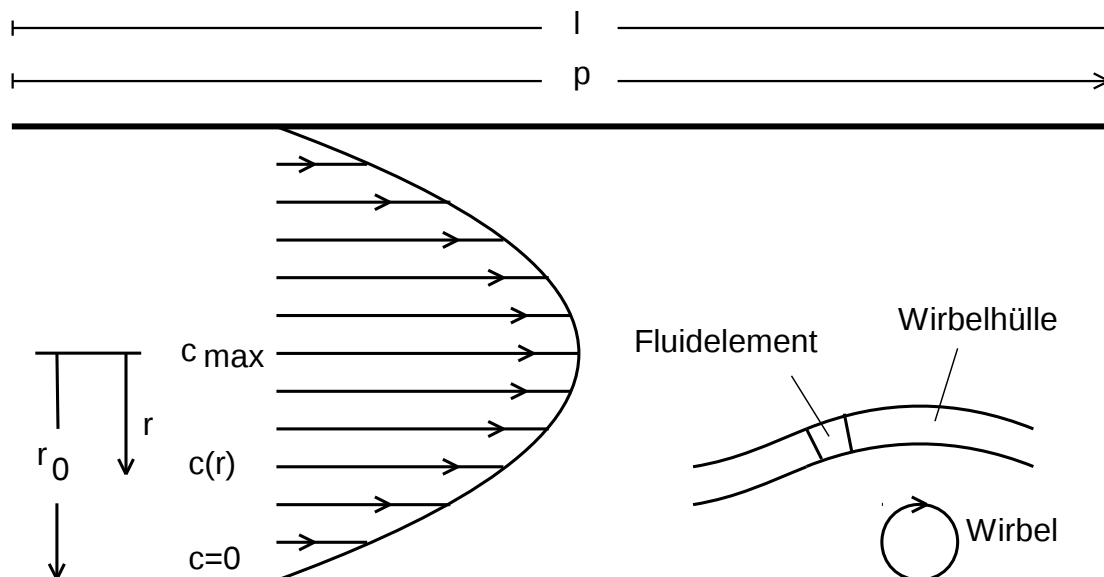


Abb. 1: Rohrströmung, Geschwindigkeitsprofil, Wirbel mit Wirbelhülle

Geometrisches Gebilde Wirbel und Wirbelhülle

Wirbel und Wirbelhülle haben in Wirklichkeit keine klaren geometrischen Grenzen. Das gilt auch für das gemeinsame geometrische Gesamtgebilde. Man kann aber sagen, dass sich das geometrische Gesamtgebilde in seiner Gesamtheit in Fließrichtung nach rechts bewegt. Innerhalb des Gesamtgebildes ändern Wirbel und Wirbelhülle ihren örtlichen Bezug zueinander nicht. Innerhalb des Gesamtgebildes ist auch die Einzelgeometrie der Wirbelhülle in Wirklichkeit nicht scharf abgegrenzt. Für eine Modellierung soll dieses jedoch näherungsweise angenommen werden.

Innerhalb der Wirbelhülle soll jetzt ein Fluid-Element definiert werden. Es bewegt sich auf der geometrischen Bahnkurve dieser Wirbelhülle. Die Geschwindigkeit auf dieser geometrischen Bahnkurve ist größer als die Geschwindigkeit des Wirbelmittelpunkts, denn der Wirbel bewegt sich ja in der Nähe der ruhenden Rohrwand und in zunehmender Entfernung von der Rohrwand wird die Geschwindigkeit größer. Auf dieser geometrischen Bahnkurve der Wirbelhülle wirken auf das Fluid-Element Reibkräfte und Zentrifugalkräfte.

Fluidelement mit Krümmung

In Abb. 2a ist ein Fluidelement zunächst ohne Krümmung gezeigt. Es hat die Kantenlänge n und die Tiefenabmessung b . Infolge der Viskosität greift oben und unten tangential zur Geschwindigkeit c die Reibkraft F_R an. Die Wirkung der Reibkräfte auf das Fluidelement soll als rechtsdrehendes Reib-Drehmoment modelliert werden.

In Abb. 2b ist wieder das Fluidelement der Kantenlänge n gezeigt. Es bewegt sich jetzt auf der krummlinienförmigen Bahn innerhalb der Geometrie der Wirbelhülle. Die Krümmung am Fluidelement nimmt nach rechts in Fließrichtung zu. Dadurch entstehen Zentrifugalkräfte, welche ebenfalls nach rechts größer werden. Durch diese zunehmenden Zentrifugalkräfte entsteht ein linksdrehendes Drehmoment, das im folgenden Zentrifugal-Drehmoment genannt wird.

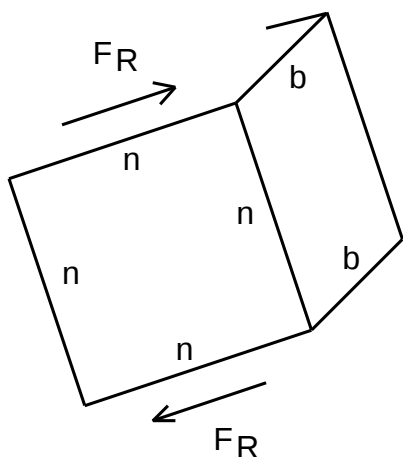


Abb. 2a: Fluidelement ohne Krümmung

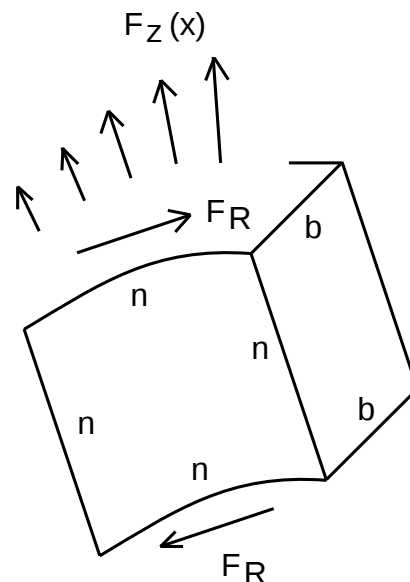


Abb. 2b: Fluidelement mit Krümmung

Das Zentrifugal-Drehmoment wirkt dem Reib-Drehmoment entgegen. Bei großer Krümmung und großer Geschwindigkeit übertrifft das Zentrifugal-Drehmoment das Reib-Drehmoment und die Strömung wird instabil.

Das Fluid-Element soll endliche Abmessungen n haben. Der Flächenquerschnitt der Wirbelhülle in Fließrichtung soll $n \cdot b$ sein. Die Geschwindigkeit c innerhalb der Wirbelhülle stellt eine mittlere Geschwindigkeit dar. Diese Vereinfachung vermeidet schwierige Integrationen.

Stabilitätsanalyse ohne Druckkräfte

Bei der hier vorgestellten Stabilitätsanalyse bleiben Druckkräfte unberücksichtigt, weil Druck keine Zustandsgröße ist. Die Modellbildung soll sich nur auf die Summe von Reib-Drehmoment und Zentrifugal-Drehmoment konzentrieren, denn diese leiten sich aus Geschwindigkeiten ab und Geschwindigkeit ist eine Zustandsgröße.

Plötzliches Abschalten der äußeren Druckdifferenz p am Rohr bewirkt keine sprungförmige Änderung der Geschwindigkeiten im Rohr. Zumindest kurzzeitig bleibt an allen Orten die Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung erhalten. Das gilt dann auch für die hier betrachteten Drehmomente und die daraus abgeleitete Argumentation zur Stabilität.

Kritische Reynoldszahl und Hysterese

Die Rohrströmung wird charakterisiert über die nach Osborne Reynolds benannte Reynoldszahl

$$Re = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} \quad . \quad (2)$$

Aus Messungen ist bekannt, dass die Strömung instabil wird, wenn die Reynoldszahl den kritischen Wert $Re_{krit} = 2300$ überschreitet, wenn also gilt

$$Re = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} > Re_{krit} = 2300 \quad .$$

Das Überschreiten des Grenzwertes kann durch jeden Parameter in der Gleichung bewirkt werden. Das Überschreiten ist jedoch unscharf. Denn bei sorgfältiger Vermeidung von Einlaufstörungen am Rohranfang ist es möglich, dass die Strömung auch bei Überschreiten der kritischen Reynoldszahl $Re_{krit} = 2300$ zunächst laminar bleibt. Jedoch erfolgt bei der kleinsten Störung ein sofortiges Umkippen in die Turbulenz. Die umgekehrte Richtung ist definierter. Denn grundsätzlich ist die Strömung bei Unterschreiten von $Re_{krit} = 2300$ laminar. Dieses Verhalten entspricht einer Hysterese.

Dreidimensionale Rohrströmung

Die Herleitung des parabelförmigen Geschwindigkeitsprofils für die dreidimensionale Rohrströmung soll an dieser Stelle noch einmal kurz angegeben werden, siehe [Lit. Budo] und [Lit. Eck] .

In der Rohrströmung sei ein Fluid-Zylinder der Länge l und mit dem Radius r angenommen (Abb. 3). Für das Kräftegleichgewicht aus Druckkraft und Reibkraft am Zylinder gilt

$$p r^2 \pi + 2\pi r l \eta \cdot \frac{dc}{dr} = 0 \quad \text{entsprechend} \quad dc = -\frac{p}{l} \frac{1}{\eta} \frac{1}{2} r dr \quad .$$

Die Integration unter Berücksichtigung einer Integrationskonstanten E ergibt

$$c = -\frac{p}{l} \frac{1}{\eta} \frac{1}{4} r^2 + E \quad .$$

Mit der Randbedingung $c(r=r_0) = 0$ und somit $E = \frac{p}{l} \frac{1}{\eta} \frac{1}{4} r_0^2$ folgt

$$c = \frac{p}{l} \frac{1}{\eta} \frac{1}{4} (r_0^2 - r^2) \quad , \quad c = \frac{p}{l} \frac{1}{\eta} \frac{1}{4} r_0^2 \left[1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right] \quad , \quad c = c_{max} \left[1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right]$$

$$c_{max} = \frac{p}{l} \cdot \frac{r_0^2}{4\eta} \quad \text{und} \quad \frac{dc}{dr} = -c_{max} \frac{2r}{r_0^2} \quad . \quad (3)$$

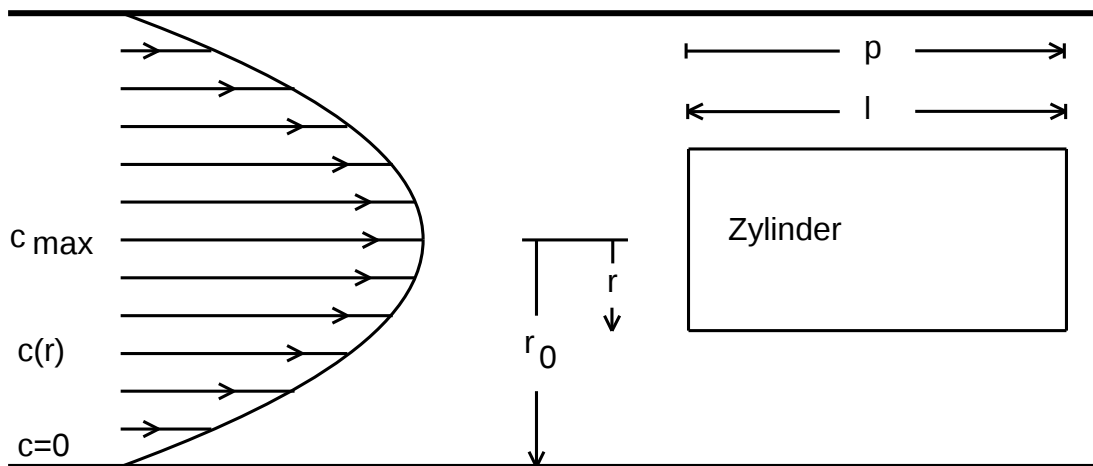


Abb. 3: Rohrströmung, Kräftegleichgewicht an Zylindergeometrie

Zweidimensionale Plattenströmung (Couette-Strömung)

Eine Strömung zwischen zwei ebenen Platten ist einfacher zu beschreiben als die Rohrströmung. Die Strömung wird angetrieben durch eine obere Platte, welche die Geschwindigkeit c_{max} hat. Die Variable r gilt ab der oberen Platte. Es folgt

$$c = c_{max} \left[1 - \frac{r}{r_0} \right] \quad \text{und} \quad \frac{dc}{dr} = - \frac{c_{max}}{r_0} \quad . \quad (4)$$

Die Gleichungen gelten für eine beliebige geometrische Tiefe der Anordnung.

Die Variablenbuchstaben r und r_0 sollen genau so wie bei der Rohrströmung gewählt werden, bezeichnen hier bei der Plattenströmung aber keine Radien sondern nur einfache Längengrößen.

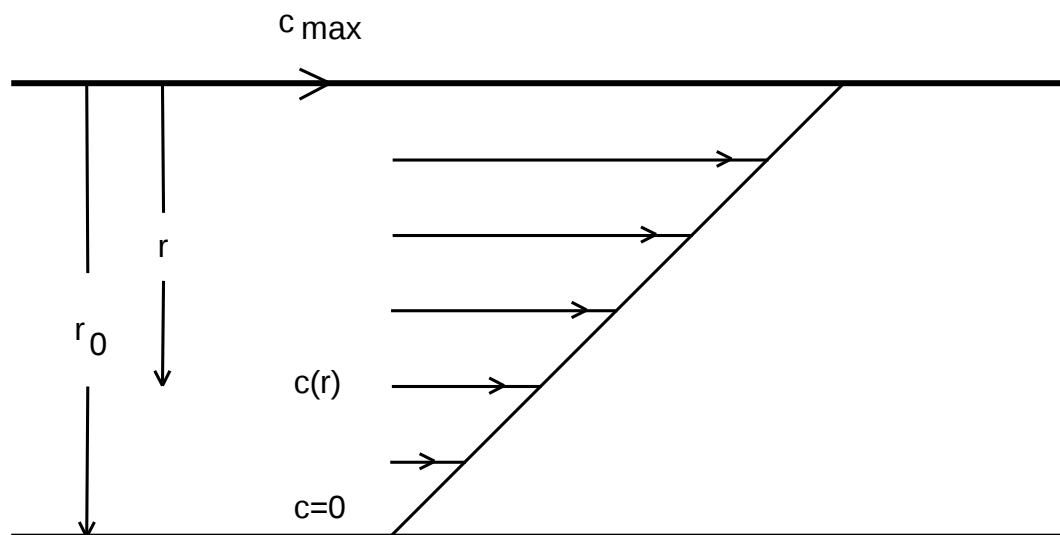


Abb. 4: Zweidimensionale Plattenströmung

Drehmoment am Fluidelement

In dieser einfachen Strömung zwischen zwei Platten soll das Fluid-Element des Volumens $n \cdot n \cdot b$ betrachtet werden (Abb. 5). Das Fluidelement fließt in der Wirbelhülle.

Die Abmessung in der Tiefe ist b . Die Einbeziehung der Tiefenabmessung b in die folgenden Analysen ist eigentlich bei der zweidimensionalen Strömungsform der Plattenströmung analytisch nicht erforderlich. Dennoch soll die Tiefenabmessung b beibehalten werden, weil dann später ein einfacher mathematischer Übergang zur dreidimensionalen Rohrströmung möglich ist.

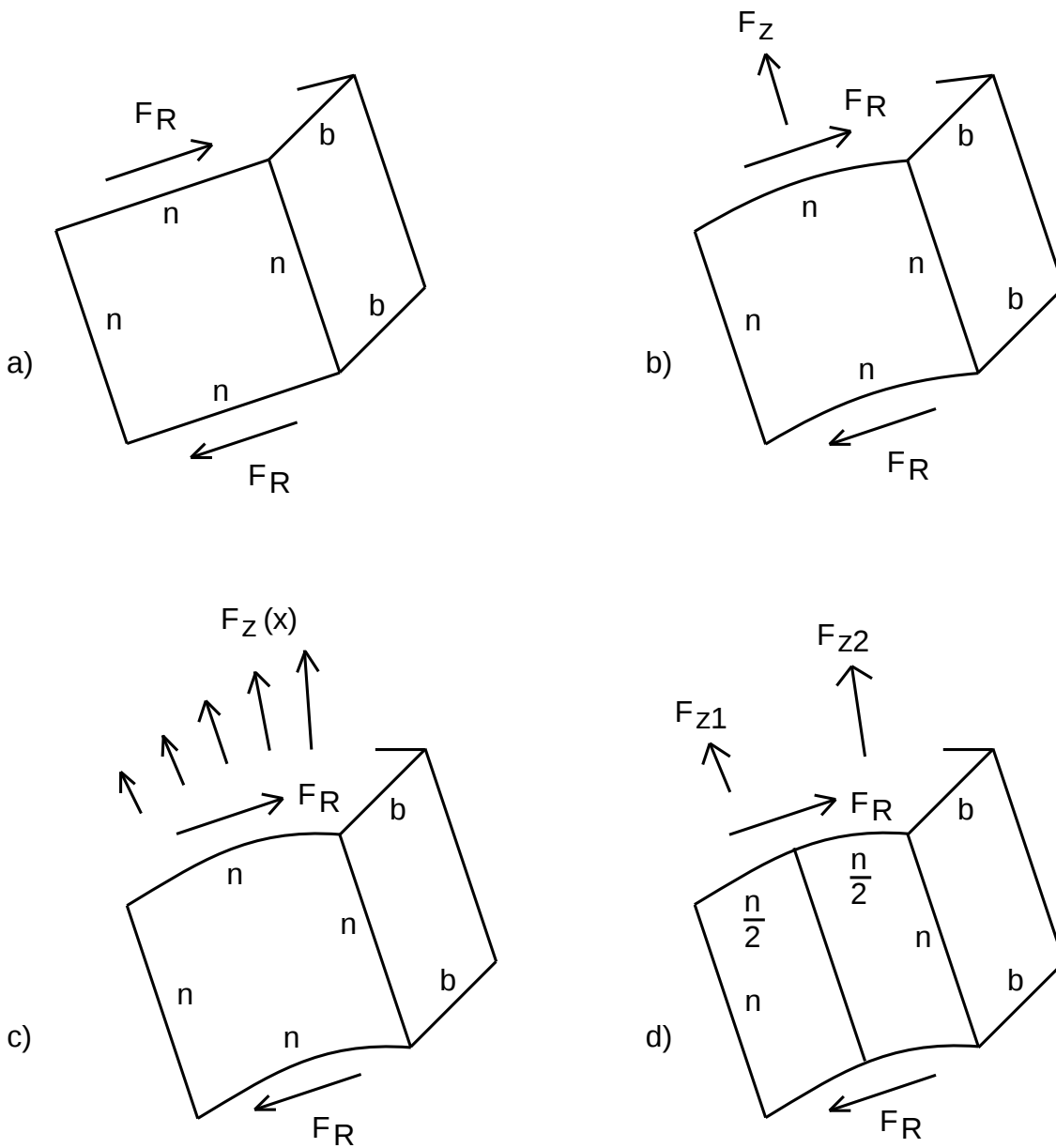


Abb. 5: Drehmomente am Fluid-Element, Vorgehensweise zur Modellbildung

In Abb. 5a

ist das Fluidelement nur mit tangentialen Reibkräften F_R dargestellt. Der Quader hat oben und unten die Flächen $n \cdot b$ an welchen die tangentialen Reibkräfte F_R angreifen.

Für die Reibkraft F_R an der oberen und unteren Fläche des Fluid-Elements gilt mit der Viskosität η

$$-\frac{F_R}{n \cdot b} = \eta \frac{dc}{dr} \quad -\frac{F_R}{n \cdot b} = -\eta \frac{c_{max}}{r_0} \quad F_R = n \cdot b \cdot \eta \frac{c_{max}}{r_0} \quad .$$

Auf den Quader wirkt also das rechtsdrehende Reib-Drehmoment

$$M_R = F_R \cdot n \quad M_R = n \cdot b \cdot n \cdot \eta \frac{c_{max}}{r_0} \quad M_R = n^2 \cdot b \cdot \eta \frac{c_{max}}{r_0} \quad . \quad (5)$$

In Abb. 5b

hat das Fluidelement einen konstanten Krümmungsradius. Neben der Reibkraft wirkt zwar eine Zentrifugalkraft F_z . Weil der Krümmungsradius aber konstant ist, ist auch F_z überall gleich. Neben dem rechtsdrehenden Reib-Drehmoment wirkt bei dieser Modellbildung noch kein Zentrifugal-Drehmoment.

In Abb. 5c

hat das Fluidelement jetzt einen variablen Krümmungsradius, welcher zeichnerisch schwach angedeutet ist. Die Zentrifugalkraft wird nach rechts größer. Neben dem rechtsdrehenden Reib-Drehmoment wirkt jetzt zusätzlich ein linksdrehendes Zentrifugal-Drehmoment auf das Fluid-Element.

In Abb. 5d

ist der Fluidquader für eine einfache Modellierung in die zwei Einzelvolumen der Kantenlänge $\frac{n}{2}$ aufgeteilt. An diesen greifen die Zentrifugalkräfte F_{z1} und F_{z2} an.

Weil die Krümmung rechts größer ist, entsprechend einem kleineren Krümmungsradius, folgt $F_{z2} > F_{z1}$ und damit ein linksdrehendes Zentrifugaldrehmoment. Die unterschiedlichen Zentrifugalkräfte F_{z1} und F_{z2} stehen in direktem Zusammenhang mit der geometrischen Form der Wirbelhülle, welche mathematisch aber erst noch zu definieren ist.

Reibkraft F_R und Reibmoment M_R bleiben unverändert wie nach Abb. 5a berechnet. Das Modell nach Abb. 5d ist die Grundlage der folgenden Mathematik.

Bewegung von Wirbeln und Wirbelhülle

Es wird eine periodische Abfolge von Wirbeln angenommen. Sie rollen an der unteren Platte entlang. Die Wirbelhülle orientiert sich an dieser periodischen Abfolge der Wirbel. Die Wirbel werden sozusagen von der Wirbelhülle eingehüllt. Wirbel und Wirbelhülle ändern ihren örtlichen Abstand zueinander nicht und wandern beide zusammen mit der Wirbelgeschwindigkeit c_w nach rechts.

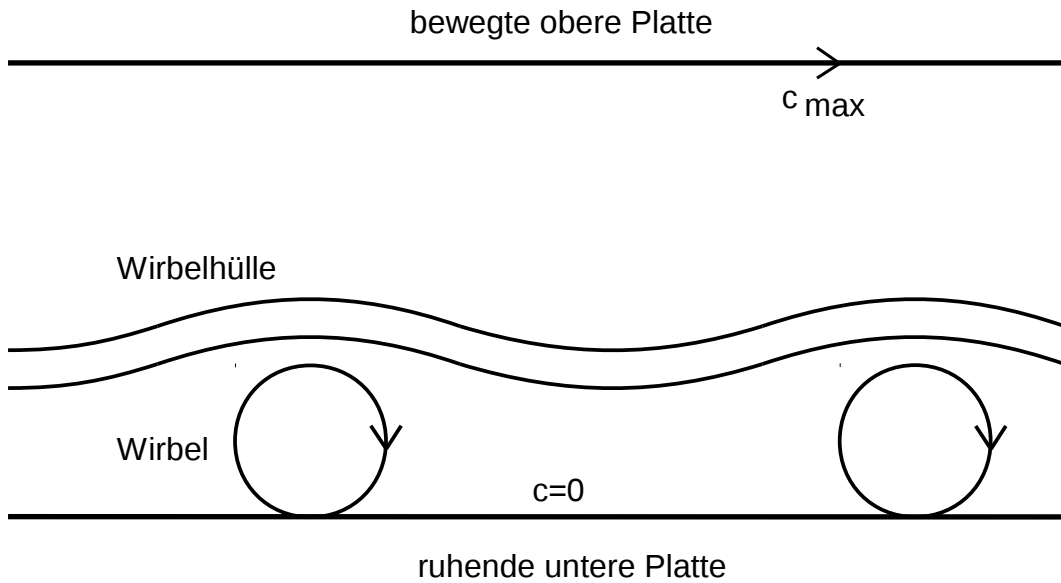


Abb. 6: Periodische Abfolge von Wirbeln und Wirbelhülle

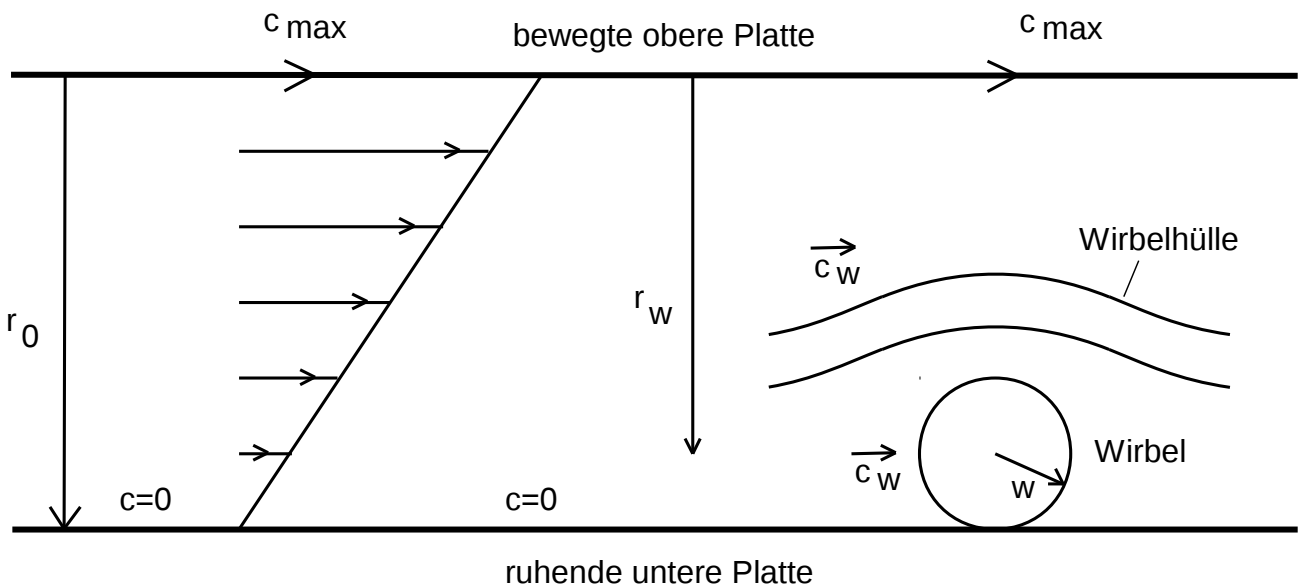


Abb. 7: Wirbel und Wirbelhülle bewegen sich als zusammenhängendes geometrisches Gebilde mit der Wirbelgeschwindigkeit c_w nach rechts

Geometrie der Wirbelhülle

Die vertikale Auslenkung der Wirbelhülle ist periodisch in x-Richtung und sei modelliert über die Sinus-Funktion

$$y(x) = y_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{x_P} x\right) \quad (6)$$

mit den Parametern Amplitude y_0 und Periode x_P . Das Maximum des Sinus soll über dem Wirbel liegen. Der Bezugspunkt des Sinus ist B bei $x=0$ und $y=0$. Die Wirbelhülle hat die vertikale Streifenhöhe n .

Wirbel und Wirbelhülle bewegen sich als ein zusammenhängendes geometrisches Gebilde mit der Wirbelgeschwindigkeit c_w nach rechts.

Die Wirbelhülle mit ihrer sinusförmigen Bahnkurve ist der geometrische Ort, in welchem sich das Fluid mit der Geschwindigkeit c_h bewegt. Auch das einzelne Fluid-Element innerhalb dieser Hülle hat die Geschwindigkeit c_h .

Die Geschwindigkeit c_h ist größer als die Geschwindigkeit des zusammenhängenden geometrische Gebildes mit der Wirbelgeschwindigkeit c_w . Es gilt $c_h > c_w$.

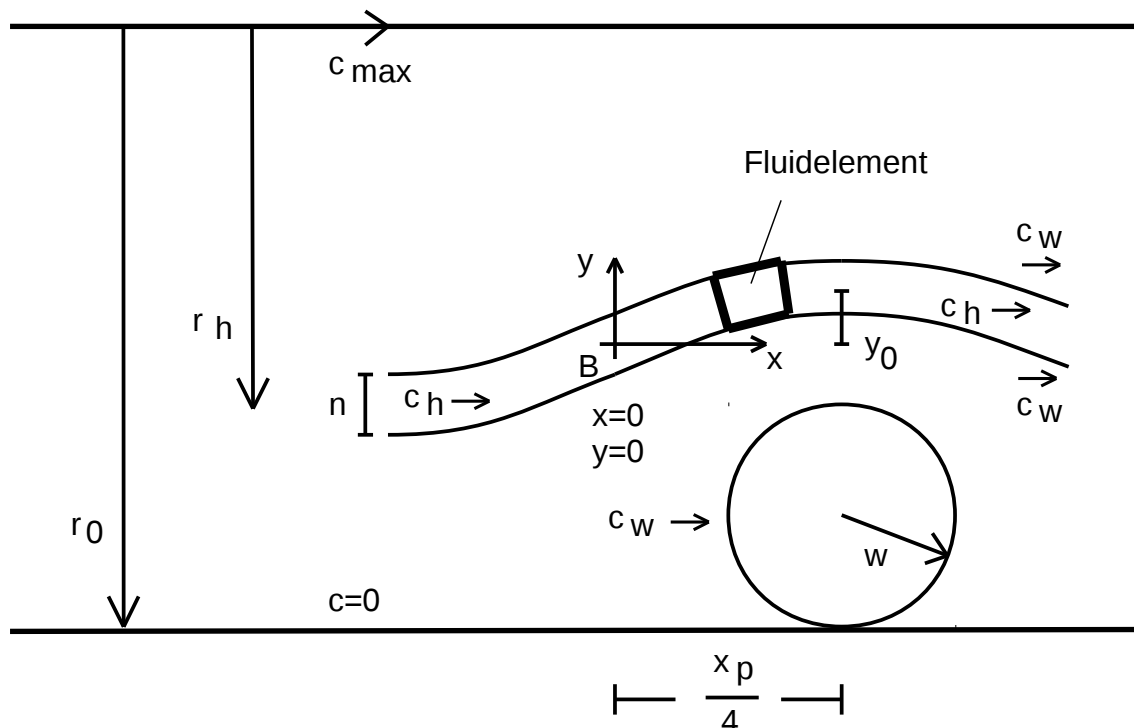


Abb. 8: Geometrisches Gebilde Wirbel und Wirbelhülle mit der Geschwindigkeit c_w , Fluid und Fluidelement mit der Geschwindigkeit $c_h > c_w$

Zentrifugalkraft am Fluidelement

Innerhalb der Wirbelhülle bewegt sich das Fluidelement der Kantenlänge n .
Es hat die Masse

$$m = \rho n^2 b .$$

Die Zentrifugalkraft infolge der Zentrifugalbeschleunigung ist

$$F_z = m \cdot a_z .$$

Für die Zentrifugalbeschleunigung gilt

$$a_z = \frac{c_z^2}{r_z} .$$

Dabei ist c_z die Zentrifugalgeschwindigkeit und r_z ist der Zentrifugalradius r_z .
Insgesamt folgt

$$F_z = \rho \cdot n^2 \cdot b \cdot \frac{c_z^2}{r_z} .$$

Zentrifugalgeschwindigkeit c_z und Zentrifugalradius r_z sind noch zu ermitteln.

Zentrifugalgeschwindigkeit

In Relation zur oberen Bezugsplatte bei $r=0$ hat das Fluid allgemein die Geschwindigkeit

$$c(r) = c_{max} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) . \quad (4)$$

Ein Wirbel an der Stelle $r=r_w$ hat speziell die Geschwindigkeit c_w

$$c_w = c(r=r_w) = c_{max} \left[1 - \frac{r_w}{r_0} \right] .$$

Ein Fluidelement in der Wirbelhülle hat an der Stelle $r=r_h$ die Geschwindigkeit c_h

$$c_h = c(r=r_h) = c_{max} \left[1 - \frac{r_h}{r_0} \right] .$$

Die Zentrifugalgeschwindigkeit c_z in Bezug auf den Wirbelmittelpunkt ist somit die Differenzgeschwindigkeit

$$c_z = c_h - c_w \quad c_z = c_{max} \left[-\frac{r_h}{r_0} + \frac{r_w}{r_0} \right] \quad c_z = \frac{c_{max}}{r_0} [r_w - r_h] \quad .$$

Die Differenz $r_w - r_h$ ist der Abstand vom Wirbelmittelpunkt zur Wirbelhülle.

Im Grenzfall $r_w - r_h = w$ wäre die Hülle noch Teil des Wirbels. Das ist unrealistisch. Hier soll daher als grobe Annahme

$$r_w - r_h = 2w$$

benutzt werden. Es folgt die Zentrifugalgeschwindigkeit

$$c_z = \frac{c_{max}}{r_0} 2w \quad . \quad (7)$$

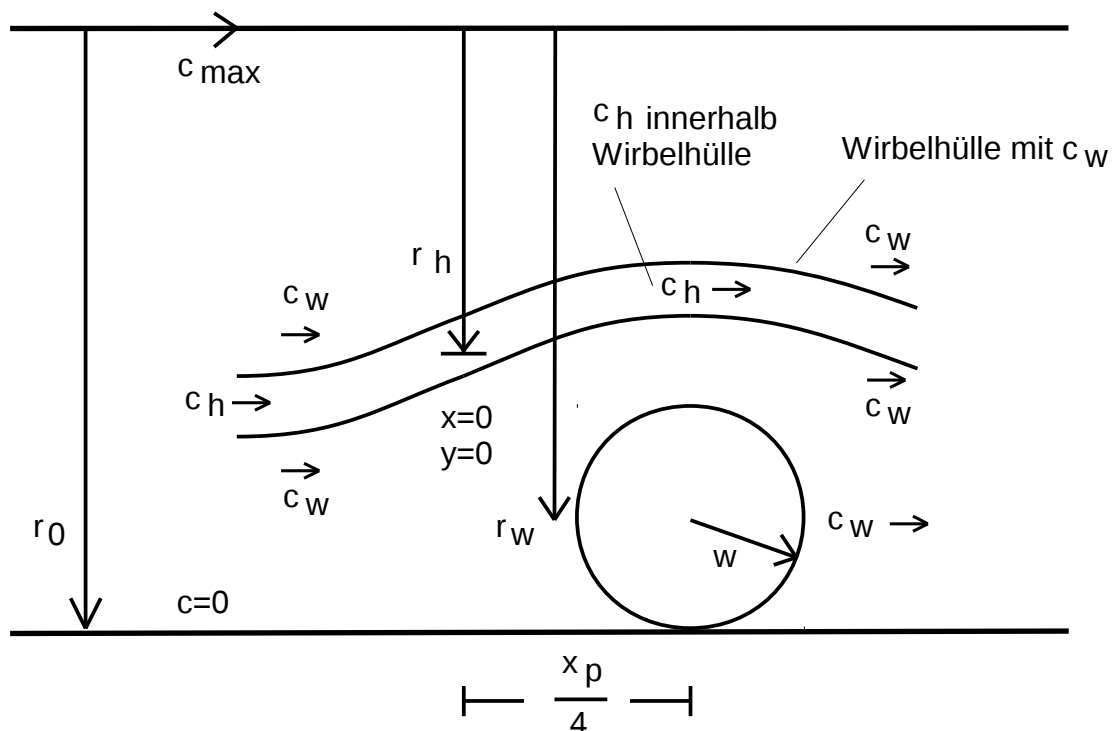


Abb. 9: Unterschied zwischen c_h und c_w , Zentrifugalgeschwindigkeit ist $c_z = c_h - c_w$

Zentrifugalradius in der Bahnkurve der Wirbelhülle

Der Zentrifugalradius ist identisch mit dem Krümmungsradius.
Für diesen lokalen Krümmungsradius r_z gilt näherungsweise

$$\frac{1}{r_z} = -y'' \quad .$$

Aus

$$y(x) = y_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{x_P} x\right), \quad y' = y_0 \cdot \frac{2\pi}{x_P} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_P} x\right) \quad \text{und} \quad y'' = -y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_P}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{x_P} x\right)$$

folgt

$$\frac{1}{r_z} = y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_P}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{x_P} x\right)$$

mit der Ortsabhängigkeit x .

Zentrifugalkraft am Fluid-Element auf der Bahnkurve der Wirbelhülle

Somit hat man am Fluidelement die Zentrifugalkraft

$$F_z = \rho \cdot n^2 \cdot b \cdot \frac{c_z^2}{r_z}$$

oder

$$F_z = n^2 \cdot b \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_P}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{x_P} x\right) \quad \text{mit} \quad c_z = \frac{c_{max}}{r_0} 2w \quad . \quad (8)$$

Die Zentrifugalkraft ist somit eine sinusförmige Funktion $F_z = F_z(x)$ der Ortsvariablen x , siehe Abb. 10 und Abb. 11.

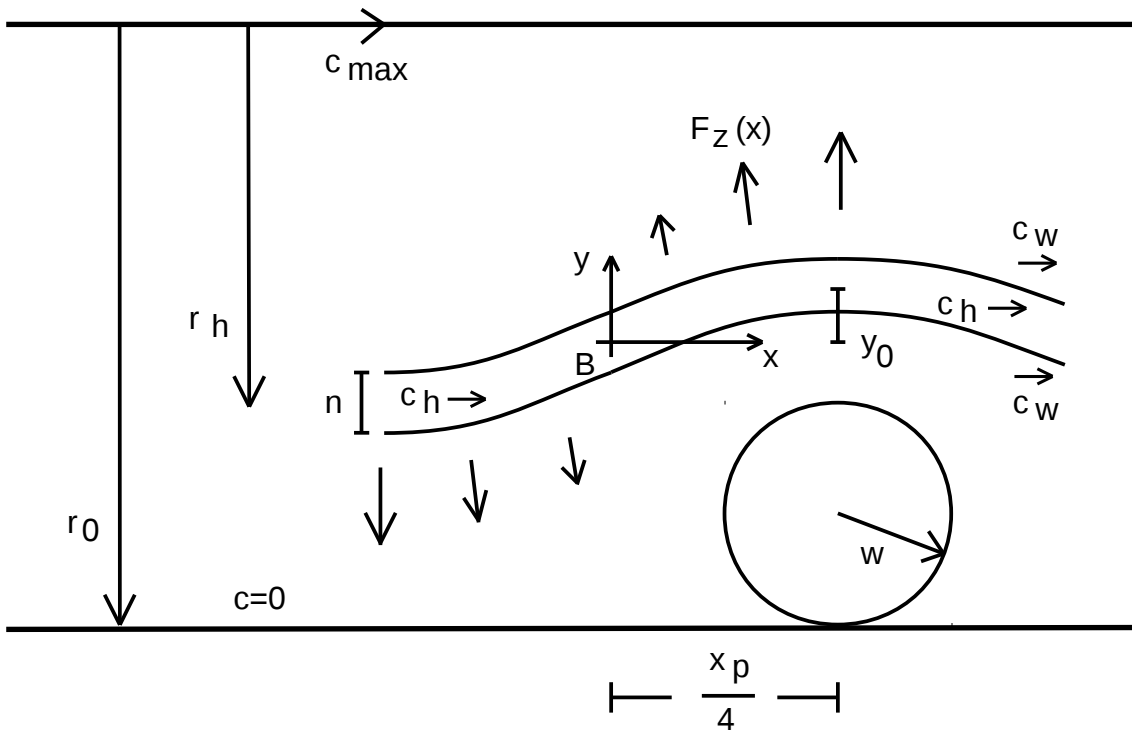


Abb. 10: Variable Zentrifugalkraft $F_z(x)$ in der sinusförmigen Bahnkurve

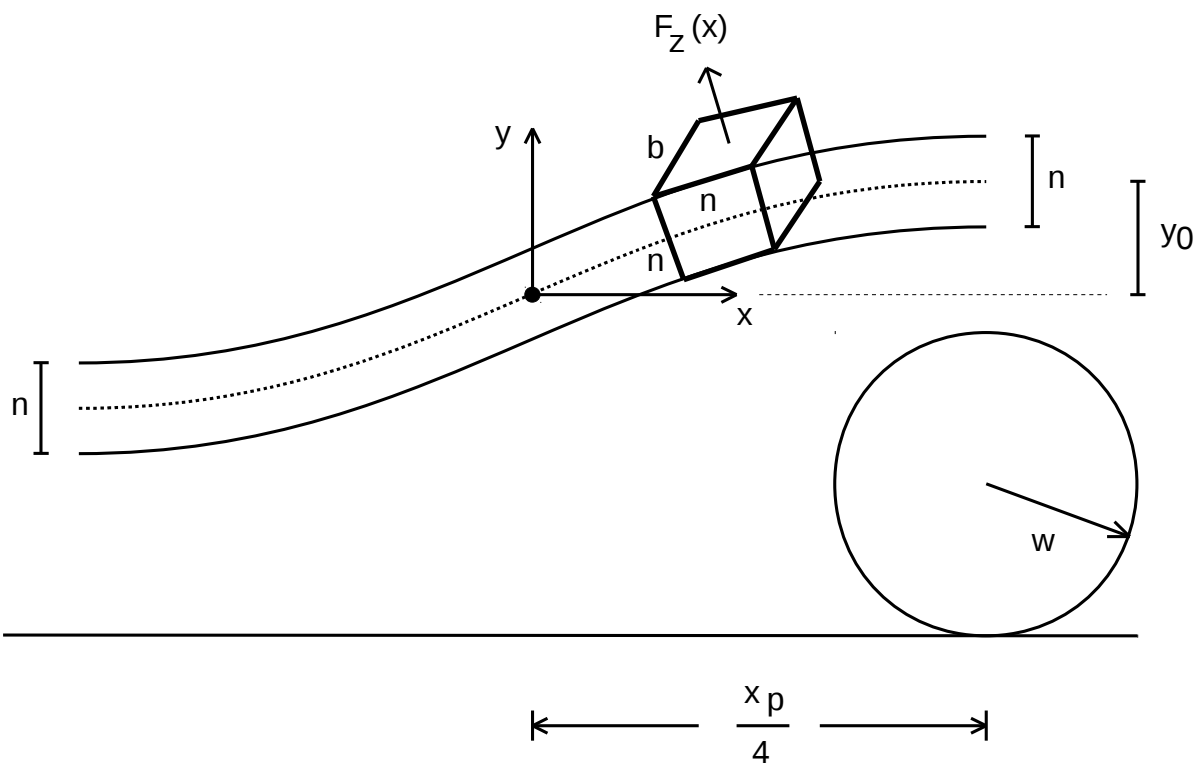


Abb. 11: Fluidelement mit Volumen $n^2 \cdot b$ in der Hülle mit Amplitude y_0 und Periode x_p
Zentrifugalkraft $F_z(x)$ am Fluidelement

Diskrete Modellierung der Zentrifugalkräfte am Fluid-Element

In der Abbildung 12 ist das einzelne Fluid-Element mit einem nach rechts abnehmenden Krümmungsradius r_z angedeutet. Dementsprechend nimmt die Zentrifugalkraft $F_z(x)$ zu. Es gilt die Funktion

$$F_z(x) = n^2 \cdot b \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_P}\right)^2 \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] \quad (8)$$

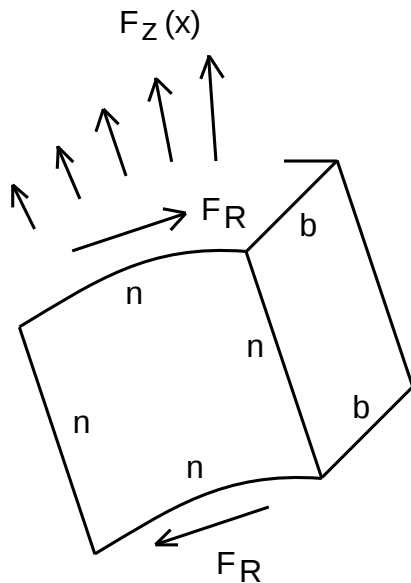


Abb.12: Volumenelement mit allgemeiner Funktion $F_z(x)$

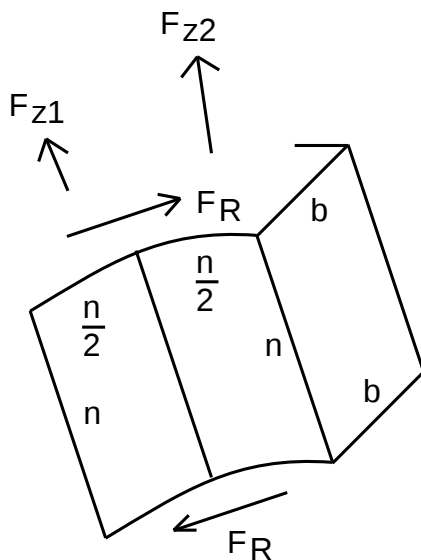


Abb.13: Aufteilung in zwei Teilvolumen mit den diskreten Zentrifugalkräften F_{z1} und F_{z2}

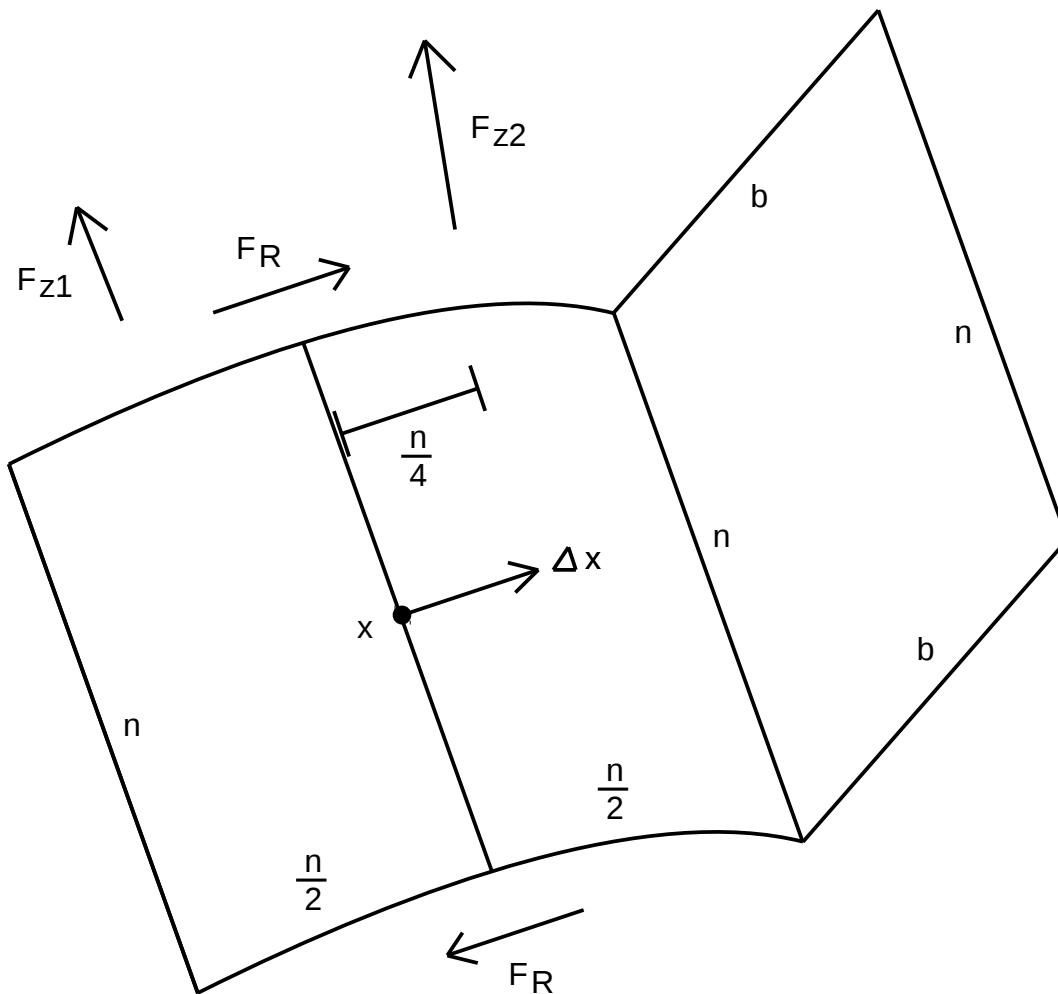


Abb. 14: Gesamtvolumen an der Koordinate x , Teilvolumen an der Koordinate $x+\Delta x$

Das Gesamtvolumen n^3 des Fluid-Elements wird aufgeteilt in zwei Teilvolumen $\frac{n}{2} \cdot n \cdot b$.
An den Teilvolumen wirken jeweils in der Mitte die Zentrifugalkräfte F_{z1} und F_{z2} .

Diese Diskretisierung ermöglicht eine einfache Beschreibung des linksdrehenden Zentrifugal-Drehmoments im Sinne Kraft mal Hebelarm mit dem Hebelarm $\frac{n}{4}$. Es ist

$$M_z = F_{z2} \cdot \frac{n}{4} - F_{z1} \cdot \frac{n}{4} \quad (9)$$

Zunächst erfolgt die Berechnung der einzelnen Zentrifugalkräfte F_{z1} und F_{z2} .

Für das Gesamtvolumen gilt

$$F_z(x) = n \cdot n \cdot b \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_P}\right)^2 \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] \quad (8)$$

Für das halbe Volumen $\frac{n}{2} \cdot n \cdot b$ bei $x + \Delta x$ gilt

$$F_z(x + \Delta x) = \frac{n}{2} \cdot n \cdot b \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_P}\right)^2 \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{x_P} \cdot (x + \Delta x)\right]$$

Die Reihenentwicklung des Sinus-Terms im Entwicklungspunkt x bis zum linearen Glied ergibt

$$\sin\left[\frac{2\pi}{x_P}(x + \Delta x)\right] = \sin\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] + \frac{d\left(\sin\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right]\right)}{dx} \cdot \Delta x$$

$$\sin\left[\frac{2\pi}{x_P}(x + \Delta x)\right] = \sin\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] + \frac{2\pi}{x_P} \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] \cdot \Delta x$$

und dann die lineare Funktion in Δx im Entwicklungspunkt x

$$F_z(x + \Delta x) = \frac{n}{2} \cdot n \cdot b \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_P}\right)^2 \cdot \left[\sin\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] + \frac{2\pi}{x_P} \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] \cdot \Delta x \right]$$

Für F_{z2} gilt $\Delta x = \frac{n}{4}$ und damit folgt

$$F_{z2} = \frac{n}{2} \cdot n \cdot b \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_P}\right)^2 \cdot \left[\sin\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] + \frac{2\pi}{x_P} \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] \cdot \left(\frac{n}{4}\right) \right]$$

Für F_{z1} bei $\Delta x = -\frac{n}{4}$ erhält man entsprechend

$$F_{z1} = \frac{n}{2} \cdot n \cdot b \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_P}\right)^2 \cdot \left[\sin\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] + \frac{2\pi}{x_P} \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] \cdot \left(-\frac{n}{4}\right) \right]$$

Das Zentrifugal-Drehmoment ist

$$M_z = F_{z2} \cdot \frac{n}{4} - F_{z1} \cdot \frac{n}{4} \quad \text{oder} \quad M_z = \frac{n}{4} \cdot [F_{z2} - F_{z1}] \quad .$$

Man hat zunächst

$$F_{z2} - F_{z1} = \frac{n}{2} \cdot n \cdot b \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_P}\right)^2 \cdot \left[\frac{2\pi}{x_P} \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] \cdot \left(+\frac{n}{4}\right) - \frac{2\pi}{x_P} \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] \cdot \left(-\frac{n}{4}\right) \right]$$

und dann das von x abhängige Drehmoment

$$M_z(x) = \frac{n^3}{8} \cdot b \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_P}\right)^2 \cdot \left[\frac{2\pi}{x_P} \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] \cdot \left(+\frac{n}{4}\right) - \frac{2\pi}{x_P} \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] \cdot \left(-\frac{n}{4}\right) \right]$$

$$M_z(x) = \frac{n^3}{8} \cdot b \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_P}\right)^3 \cdot \left[\cos\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] \cdot \left(+\frac{n}{4}\right) + \cos\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] \cdot \left(+\frac{n}{4}\right) \right]$$

welches schließlich

linksdrehendes Zentrifugal-Drehmoment

$$M_z(x) = \frac{n^4}{16} \cdot b \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_P}\right)^3 \cos\left[\frac{2\pi}{x_P} x\right] \quad (10)$$

genannt werden soll.

Infolge der Reibkraft wirkt auf das Fluid-Element außerdem auch das

$$\text{rechtsdrehende Reib-Drehmoment} \quad M_R = n^2 \cdot b \cdot \eta \cdot \frac{c_{max}}{r_0} \quad . \quad (5)$$

Drehmomentengleichgewicht

Für $M_z < M_R$ ist das Gleichgewicht stabil.

Für $M_z > M_R$ ist das Gleichgewicht instabil.

Die Stabilitätsgrenze befindet sich bei $M_z = M_R$ entsprechend

$$\frac{n^4}{16} \cdot b \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) = n^2 \cdot b \cdot \eta \cdot \frac{c_{max}}{r_0}$$

oder

$$\frac{n^2}{16} \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) = \eta \cdot c_{max} \cdot \frac{1}{r_0} \quad .$$

Es ist anzumerken, dass die Tiefenabmessung b herausgekürzt werden konnte. Der Grund liegt in der Zweidimensionalität des Problems.

Aus dieser Gleichung für die Stabilitätsgrenze soll die kritische Reynoldszahl ermittelt werden.

Eine Umstellung ergibt

$$\rho \cdot \left(\frac{c_z}{c_{max}}\right)^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) \cdot \frac{n^2}{16} = \eta \cdot \frac{1}{c_{max}} \cdot \frac{1}{r_0}$$

und daraus

$$\frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{1}{\left(\frac{c_z}{c_{max}}\right)^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) \cdot \frac{n^2}{16}} \quad .$$

Die linke Seite ist nach Definition die Reynoldszahl

$$Re = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} \quad .$$

Weil hier die Stabilitätsgrenze behandelt wird, sei es die kritische Reynoldszahl

$$Re_{krit} = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{1}{\left(\frac{c_z}{c_{max}}\right)^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) \cdot \frac{n^2}{16}} \quad . \quad (11)$$

Normierung auf Bezugsgröße r_0

Nach einer Normierung der Längengrößen y_0 , r_p und n auf die wichtige Bezugsgröße r_0 erhält man

$$Re_{krit} = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{1}{\left(\frac{c_z}{c_{max}}\right)^2 \cdot \frac{y_0}{r_0} \cdot \left(\frac{r_0}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) \cdot \frac{n^2}{16r_0^2} \cdot (2\pi)^3}$$

$$Re_{krit} = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{1}{\left(\frac{c_z}{c_{max}}\right)^2 \cdot \frac{y_0}{r_0} \cdot \left(\frac{r_0}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) \cdot \frac{n^2}{2r_0^2} \cdot (\pi)^3}$$

und schließlich

$$Re_{krit} = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{2}{\left(\frac{c_z}{c_{max}}\right)^2 \cdot \frac{y_0}{r_0} \cdot \left(\frac{r_0}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) \cdot \left(\frac{n}{r_0}\right)^2 \cdot \pi^3} \quad (12)$$

Die größte Gefahr einer Instabilität entsprechend einer kleinen Reynoldszahl ist für

$$\cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) = 1 \quad \text{also} \quad x=0 \quad (13)$$

gegeben. Dieser Spezialfall ist bei folgenden Zahlenwertdiskussionen wichtig.

Die weitere wesentliche Folgerung aus der Normierung besteht darin, dass die einzelnen Quotienten

$$\frac{c_z}{c_{max}}, \quad \frac{y_0}{r_0}, \quad \frac{r_0}{x_p} \quad \text{und} \quad \frac{n}{r_0}$$

alle bestimmt deutlich kleiner als 1 sind. Zusammen mit der Wirkung der Potenzierungen folgt für Re_{krit} mit Sicherheit ein großer Zahlenwert. Ein Wert $Re_{krit} > 1000$ ist möglich.

Bereich der bedingten Instabilität

Das rechtsdrehende Reib-Drehmoment ist für alle x konstant, entsprechend

$$M_R = n^2 \cdot b \cdot \eta \cdot \frac{c_{max}}{r_0} = const. \quad (5)$$

Das linksdrehende Zentrifugal-Drehmoment ist dagegen eine Funktion von x , entsprechend

$$M_z(x) = \frac{n^4}{16} \cdot b \cdot \rho \cdot c_z^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_p}\right)^3 \cos\left[\frac{2\pi}{x_p} x\right]$$

Im gesamten positiven Wertebereich des Kosinus entsprechend

$$0 < \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) < 1 \quad \text{oder} \quad -\frac{x_p}{4} < x < +\frac{x_p}{4}$$

wirkt das linksdrehende Zentrifugal-Drehmoment dem rechtsdrehenden Reib-Drehmoment entgegen.

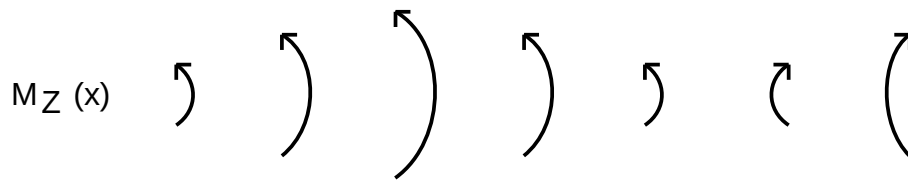
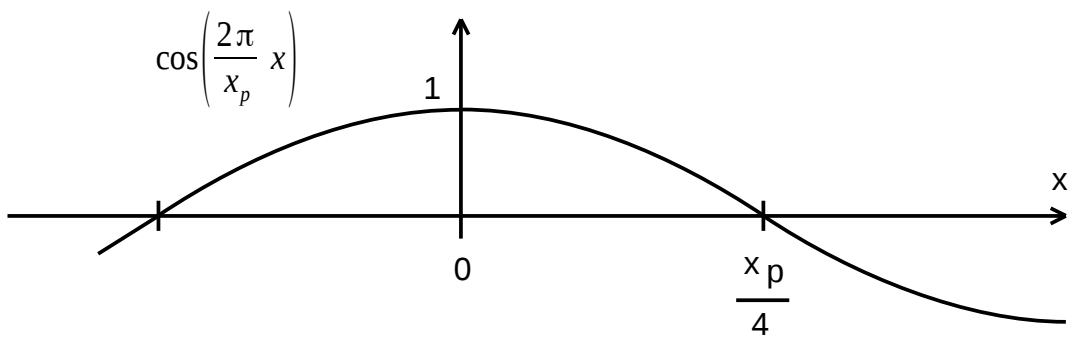
Falls tatsächlich $M_z(x) > M_R$ für einen konkreten Wertebereich von x gilt, so hat man hier bedingte Instabilität. Das ist nach der Skizze in Abb. 15 in der Nähe von $x=0$ der Fall, also im Bereich des Kosinus-Maximums. Das hat zur Folge, dass die Amplitude der sinusförmigen Hülle zusammen mit dem Wirbel nach und nach immer größer wird. Das System ist instabil. Es beginnt Chaos.

Falls aber im positiven Wertebereich des Kosinus überall $M_z(x) < M_R$ gilt, so hat man Stabilität. Die Amplitude der sinusförmigen Hülle wird zusammen mit dem Wirbel nach und nach kleiner. Die sinusförmige Hülle geht über in eine waagerechte stabile Strömungsform.

Im Bereich hinter dem Wirbel entsprechend

$$x > \frac{x_p}{4}$$

sind sowohl das Reib-Drehmoment als auch das Zentrifugal-Drehmoment rechtsdrehend. Die Wirkung des Reib-Drehmoments wird durch das Zentrifugal-Drehmoment unterstützt. In diesem Bereich findet eine Verkleinerung der Sinus-Amplitude der Wirbelhülle statt. Dieser Bereich ist stabil.



bedingt instabil stabil

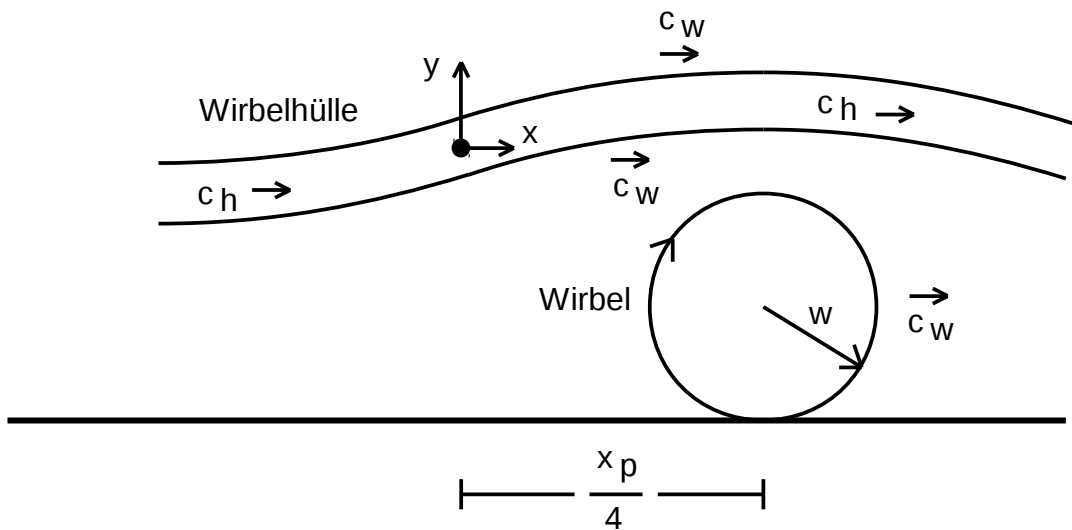


Abb. 15: Bereich der bedingten Instabilität

Normierung auf Wirbelgröße w

In den Formeln ist bislang noch keine Wirbelgröße enthalten. Es soll daher ein Bezug auf die Wirbelgröße w gemacht werden. Ausgehend von

$$Re_{krit} = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{1}{\left(\frac{c_z}{c_{max}}\right)^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) \cdot \frac{n^2}{16}} \quad (11)$$

folgt zunächst mit

$$c_z = \frac{c_{max}}{r_0} 2w \quad \text{entsprechend} \quad \frac{c_z}{c_{max}} = \frac{2w}{r_0} \quad (7)$$

$$Re_{krit} = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{1}{\left(\frac{2w}{r_0}\right)^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) \cdot \frac{n^2}{16}} .$$

Nach der Normierung der Längengrößen y_0 , r_p und n ebenfalls auf die Wirbelgröße w erhält man

$$Re_{krit} = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{2}{\left(\frac{2w}{r_0}\right)^2 \cdot \frac{y_0}{w} \cdot \left(\frac{w}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) \cdot \left(\frac{n}{w}\right)^2 \cdot \pi^3} . \quad (14)$$

Die geometrischen Längengrößen y_0 , x_p und n sollten in einem festen Zusammenhang mit dem Wirbelgröße w stehen. Somit sind die Quotienten

$$\frac{y_0}{w} \quad \frac{w}{x_p} \quad \frac{n}{w}$$

weitgehend unveränderlich. Als veränderlicher Quotient bleibt nur

$$\frac{2w}{r_0} .$$

Dieser veränderliche Quotient gestattet die wichtige Aussage, dass ein kleiner Wirbel

$$\frac{2w}{r_0} \ll 1$$

eine große kritische Reynoldszahl zur Folge hat. Dieses ist bei Rohrströmungen durch die Praxis bestätigt. Es ist bekannt, dass bei einer kleinen Störung in Form eines kleinen Wirbels zunächst die laminare Strömungsform erhalten bleiben kann und noch keine Turbulenz auftritt. Erst bei einer sehr großen Reynoldszahl kippt die Strömung in Turbulenz um.

Abschätzung der kritischen Reynoldszahl für die Plattenströmung

In Anlehnung an praktische Erfahrungen können Werte der Quotienten und damit letztlich die Reynoldszahl abgeschätzt werden.

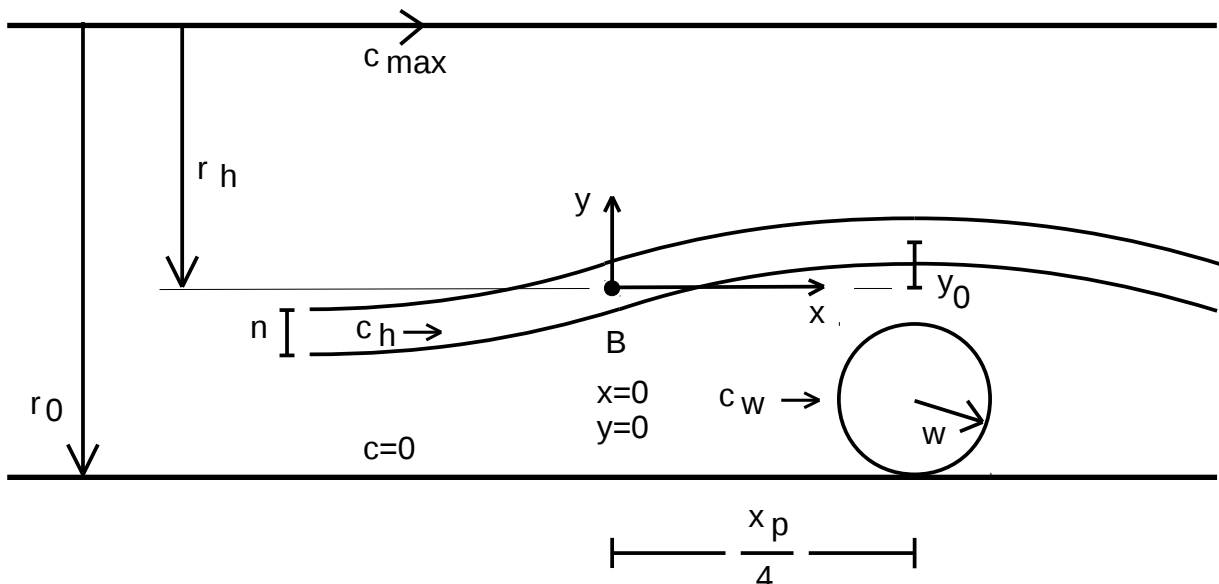


Abb. 17 Abschätzung der geometrischen Größenverhältnisse

Zunächst sei der Wirbel groß. Dann gilt etwa

$$\frac{2w}{r_0} = \frac{1}{2}$$

Oberhalb des Wirbels kann sich noch gut die Einhüllende ausbilden. Bis zur oberen Platte ist noch genügend Platz für eine weitgehend störungsfreie Strömung.

Das Verhältnis Wirbelradius zu Periode $\frac{w}{x_p}$ lässt sich aus Fotos von realen Strömungen als auch aus Simulationsergebnissen entnehmen. Man findet vielfach grob den Wert

$$\frac{w}{x_p} = \frac{1}{8} .$$

Auch das Verhältnis von Sinusamplitude zu Wirbelgröße ist mit einem Wert von

$$\frac{y_0}{w} = \frac{1}{4}$$

aus realen Bildern zu entnehmen.

Wie oben bereits diskutiert soll gelten $\cos\left(\frac{2\pi}{x_p}x\right) = 1$.

Abmessung n des Fluid-Elements

Das Verhältnis $\frac{n}{w}$ ist von großer Bedeutung. Der Parameter n modelliert die vertikale Abmessung der Wirbelhülle. Ebenso ist n die geometrische Kantenlänge des Fluidelements und damit die Grundlage des hier genutzten Drehmomentengleichgewichts.

In der Realität wird die Wirbelhülle nicht überall die gleiche Dicke n haben. Man muss also annehmen, das $\frac{n}{w}$ eine Funktion der Ortsvariablen x ist entsprechend $\frac{n}{w}(x)$.

Eine vollständige analytische Lösung ist mit Sicherheit schwierig. Jedoch sollte sich mit Hilfe von FEM-Simulationen eine brauchbare Modellfunktion $\frac{n}{w}(x)$ ermitteln lassen. Entsprechende Arbeiten sind geplant.

Dennoch kann der Wertebereich von $\frac{n}{w}$ schon hier mit großer Sicherheit eingegrenzt werden zu $\frac{1}{10} < \frac{n}{w} < \frac{1}{2}$. Deutlich kleinere oder größere Werte sind nicht sinnvoll.

Eine gerechtfertigte Annahme für die folgenden Rechnungen ist demnach $\frac{n}{w} = \frac{1}{4}$. Einsetzen sämtlicher angenommener Werte ergibt

$$Re_{krit} = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \pi^3} = 8467 \quad (15)$$

als Schätzwert für die kritische Reynoldszahl der Plattenströmung.

Analytischer Übergang von Zweiplattenströmung auf Rohrströmung

Das Geschwindigkeitsprofil der Zweiplattenströmung ist eine lineare Funktion $c = c(r)$ des Parameters r . Für die Plattenströmung gilt

$$c = c_{max} \left[1 - \frac{r}{r_0} \right] \quad \text{und} \quad \frac{c_z}{c_{max}} = \frac{2w}{r_0} \quad (7)$$

In der Tiefe variiert das Strömungsprofil nicht, es ist zweidimensional.

Für die Reynoldszahl ergab sich bei der Plattenströmung

$$Re_{krit} = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{1}{\left(\frac{c_z}{c_{max}} \right)^2 \cdot y_0 \cdot \left(\frac{2\pi}{x_p} \right)^3 \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{x_p} \cdot x \right) \cdot \frac{n^2}{16}} \quad (11)$$

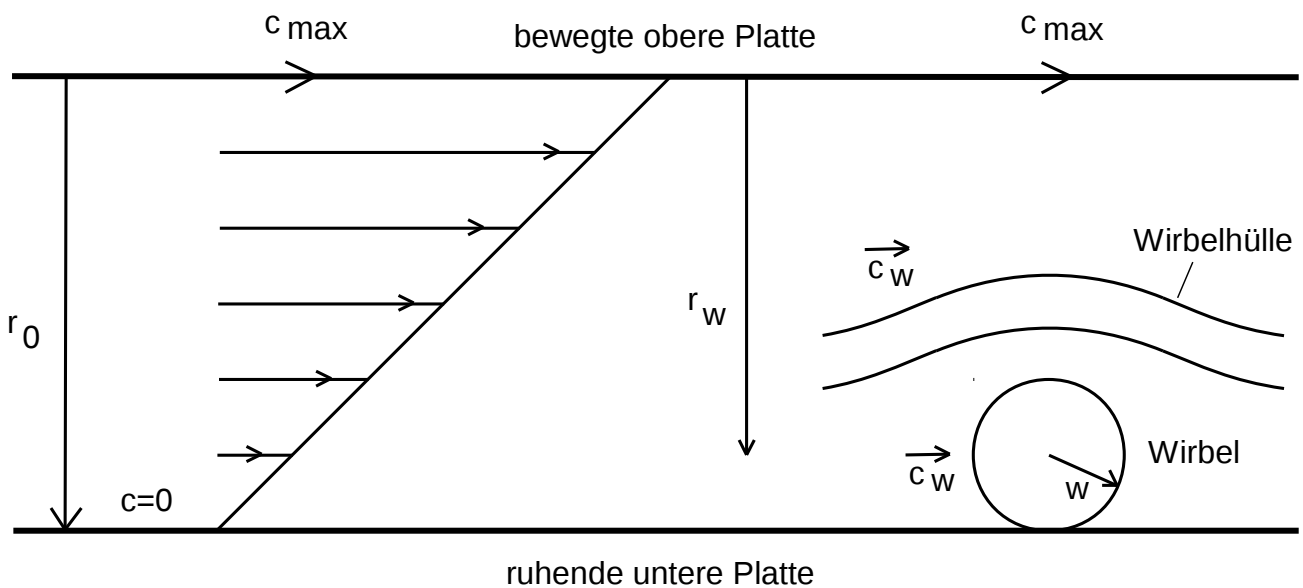


Abb. 16: Zweiplattenströmung

Die Rohrströmung dagegen ist dreidimensional (Abb. 17). Für die Rohrströmung gilt exakt

$$c = c(r) = c_{max} \left[1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right] \quad (1)$$

Die Variablen r , r_0 , r_w und r_h kennzeichnen jetzt Radien und gelten ab der Mitte des Rohres, wo die Fluid-Parabel ihr Maximum hat (Abb. 17).

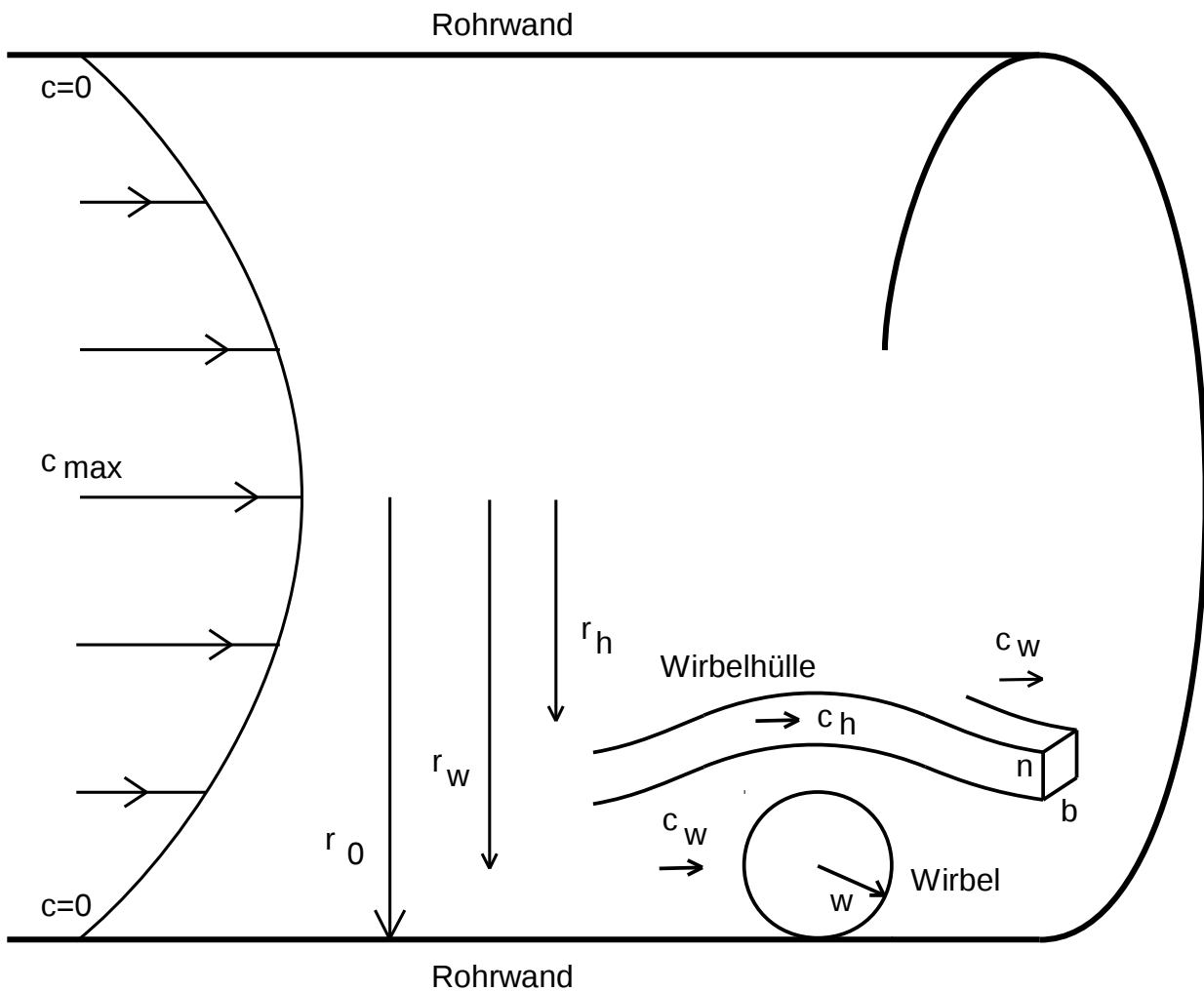


Abb. 17: Rohrströmung mit Wirbel in Nähe der Rohrwand

Ein Wirbel ist jetzt ein umlaufender Ring. Die Wirbelhülle ist ein umlaufendes dreidimensionales Gebilde, das in Strömungsrichtung und bei einer periodischen Abfolge von Wirbeln die periodische Form einer Welle hat.

Die Wirbelringe sollen an der Rohrwand entlang rollen und sollen einen deutlichen Abstand von der Rohrmitte haben. Dann sehen Wirbel und Wirbelhülle die Rohrwand wieder näherungsweise als die ruhende untere Platte.

Unter diesen Annahmen verhält sich die Rohrströmung in der Nähe der Wand ähnlich wie die Plattenströmung.

Auch der Fluidquader kann dann in Umlaufrichtung wieder die Tiefe b haben, welche dann aber letztlich in den Gleichungen nicht mehr erscheint.

Die für die Plattenströmung ermittelten Gleichungen sollen daher im Folgenden in Gleichungen für die Rohrströmung überführt werden.

Für die Wirbelgeschwindigkeit gilt bei r_w

$$c_w = c(r=r_w) = c_{max} \left[1 - \frac{r_w^2}{r_0^2} \right] .$$

Für die Strömung c_h in der Wirbelhülle bei r_h gilt

$$c_h = c(r=r_h) = c_{max} \left[1 - \frac{r_h^2}{r_0^2} \right] .$$

Die Zentrifugalgeschwindigkeit bezüglich des Wirbelmittelpunktes ist

$$c_z = c_h - c_w \quad c_z = c_{max} \left[-\frac{r_h^2}{r_0^2} + \frac{r_w^2}{r_0^2} \right] \quad c_z = \frac{c_{max}}{r_0^2} [r_w^2 - r_h^2] .$$

Es gelte wieder die grobe Annahme $r_w - r_h = 2w$. Daraus folgt

$$r_h = r_w - 2w \quad r_h^2 = r_w^2 - 4w \cdot r_w + 4w^2 \quad r_w^2 - r_h^2 = r_w^2 - r_w^2 + 4w \cdot r_w - 4w^2$$

$$r_w^2 - r_h^2 = 4w \cdot r_w - 4w^2 \quad \text{und daraus dann} \quad c_z = \frac{c_{max}}{r_0^2} [4w \cdot r_w - 4w^2] .$$

Der Wirbel soll in Wandnähe sein mit $r_w \approx r_0$. Dann ist

$$c_z = \frac{c_{max}}{r_0^2} [4w \cdot r_0 - 4w^2] .$$

Der Wirbel soll klein sein, entsprechend $w \ll r_0$. Es gilt so für die Rohrströmung

$$c_z = \frac{c_{max}}{r_0^2} [4w \cdot r_0] \quad , \quad c_z = \frac{c_{max}}{r_0} \cdot 4w \quad \text{und} \quad \frac{c_z}{c_{max}} = \frac{4w}{r_0} .$$

Die Gleichung für die Plattenströmung

$$Re_{krit} = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{2}{\left(\frac{2w}{r_0}\right)^2 \cdot \frac{y_0}{w} \cdot \left(\frac{w}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) \cdot \left(\frac{n}{w}\right)^2 \cdot \pi^3}$$

ergab sich mit $\frac{c_z}{c_{max}} = \frac{2w}{r_0}$. Jetzt ersetzt man diesen Term durch $\frac{c_z}{c_{max}} = \frac{4w}{r_0}$

und erhält die **Gleichung für die Rohrströmung**

$$Re_{krit} = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{2}{\left(\frac{4w}{r_0}\right)^2 \cdot \frac{y_0}{w} \cdot \left(\frac{w}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) \cdot \left(\frac{n}{w}\right)^2 \cdot \pi^3} \quad (16)$$

Die Gleichungen für Plattenströmung und Rohrströmung unterscheiden sich also nur wenig.

Ein extrem kleiner Wirbel bewirkt wegen $\frac{4w}{r_0}$ wieder eine beliebig große Reynoldszahl.

Ist der Wirbel aber nicht extrem klein und hat aber andererseits von der Rohrmitte einen deutlichen Abstand, dann gilt zum Beispiel

$$\frac{4w}{r_0} = 1$$

Ansonsten soll wie beim Zahlenwertbeispiel bei der Plattenströmung gewählt werden

$$\frac{y_0}{w} = \frac{1}{4}, \quad \frac{w}{x_p} = \frac{1}{8}, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{n}{w} = \frac{1}{4}$$

Einsetzen der Werte ergibt die kritische Reynoldszahl für die Rohrströmung

$$Re_{krit} = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{2}{\left(\frac{1}{1}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \pi^3} = 2117 \quad (17)$$

Dieser Zahlenwert kommt dem angestrebten Wunschwert nahe. Es ist aber mit aller Deutlichkeit auf das Zustandekommen des Zahlenwertes hinzuweisen. Alle Quotienten sind Schätzwerte. Geringe Veränderungen der Quotienten im Zusammenhang mit den Potenzierungen verändern das Ergebnis erheblich.

Zustandsgröße Geschwindigkeit

Die hier vorgestellte Stabilitätsanalyse basiert auf Drehmomenten am Fluid-Element. Druckkräfte werden nicht berücksichtigt. Die Argumentation zur Stabilität erfolgt hier unabhängig von der Variablen Druck.

Beim Rohr ist die Druckdifferenz über die Länge des Rohres die antreibende Größe für die Strömung. Für die Stabilitätsanalyse ist die Druckdifferenz aber nicht erforderlich, weil Druck keine Zustandsgröße ist. Druck kann sich sprunghaft auf der Zeitachse ändern.

Die Geschwindigkeiten jedoch und die unmittelbar davon abhängigen Drehmomente sind dagegen Zustandsgrößen und können sich nicht plötzlich ändern.

Sprungförmiges Abschalten der äußeren Druckdifferenz bewirkt also keine sprunghafte Änderung der Geschwindigkeiten im Rohr. Zumindest kurzzeitig bleibt an allen Orten die Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung erhalten. Das gilt dann auch für die hier betrachteten Drehmomente an den Fluid-Elementen.

Wirbelentstehung und Hysterese der Instabilität

An der Rohrwand können kleine Wirbel infolge von Rauigkeiten entstehen. Weiterhin können kleine Wirbel am Anfang des Rohres beim Einlauf der Strömung in das Rohr vorhanden sein.

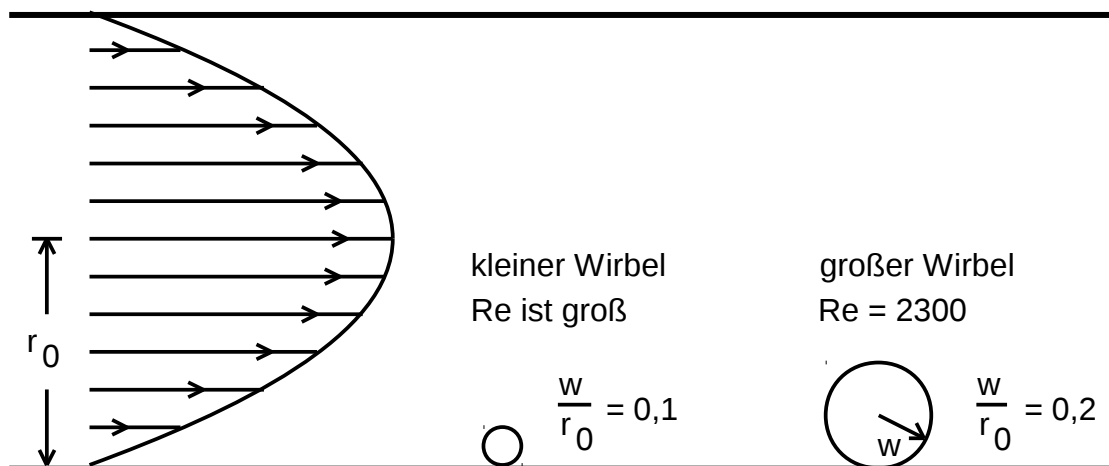


Abb.18: Kleiner und großer Wirbel an der Rohrwand

In der strömungsmechanischen Praxis beobachtet man, dass bei Vermeidung von Rauigkeiten an der Rohrwand und Vermeidung von Einlaufstörungen am Rohranfang sich für kurze Zeitabschnitte Reynoldszahlen deutlich größer als 2300 erreichen lassen.

Das Überschreiten ist unscharf. Bei Vermeidung der Störungen kann die Strömung zunächst laminar bleiben und die Turbulenz erst bei $Re=5000$ oder sogar $Re=10000$ eintreten. Aber bei der kleinsten Störung erfolgt ein sofortiges Umkippen in die Turbulenz.

Die umgekehrte Richtung, also die Rückkehr zur laminaren Strömung, ist dagegen genau definiert. Denn grundsätzlich ist die Strömung bei Unterschreiten von $Re_{krit}=2300$ immer laminar. Diese Erscheinung entspricht einer Hysterese.

Das Hysterese-Verhalten lässt sich mit der Gleichung

$$Re_{krit} = \frac{\rho \cdot c_{max} \cdot r_0}{\eta} = \frac{2}{\left(\frac{4w}{r_0}\right)^2 \cdot \frac{y_0}{w} \cdot \left(\frac{w}{x_p}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{x_p} x\right) \cdot \left(\frac{n}{w}\right)^2 \cdot \pi^3} \quad (16)$$

begründen.

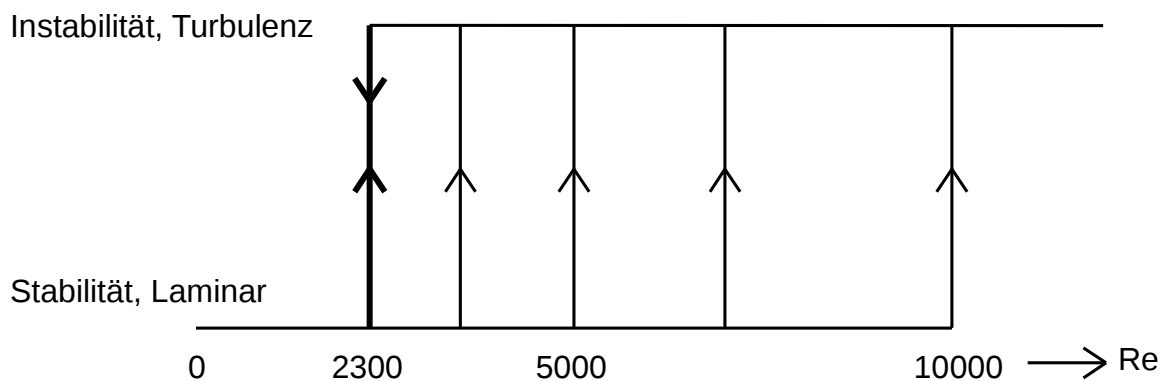


Abb. 19: Hysterese der Instabilität einer Rohrströmung

Bei kleinen Wirbeln entsprechend

$$\frac{4w}{r_0} \ll 1$$

muss zunächst eine große Reynoldszahl überschritten werden, um in die Instabilität zu kommen. Das gelingt zum Beispiel in Form einer großen Geschwindigkeit.

Die erreichte Instabilität lässt den Wirbel nun immer größer werden. Daraus folgt nach und nach eine immer kleinere Reynoldszahl bis herunter zum Wert $Re_{krit}=2300$.

Zur Rückkehr in die laminare Strömungsform ist die Geschwindigkeit nun so weit zu reduzieren, bis die Reynoldszahl wieder unterhalb von $Re_{krit}=2300$ liegt.

Die Hysterese zeigt sämtliche Merkmale, die allgemein von Hysteresen bekannt sind. Typisch ist der Mitkopplungs-Effekt beim Übergang in die Instabilität und beim Zurückfallen in die Stabilität. Typisch ist somit ebenfalls der Gedächtniseffekt, den man auch bei bistabilen elektronischen Kippschaltungen findet.

Zusammenfassung

Die Instabilität einer Rohrströmung wird über das Gleichgewicht von Reib-Drehmoment und Zentrifugal-Drehmoment an einem Fluid-Element der Wirbelhülle analysiert. Eine rechnerische Auswertung in Anlehnung an geschätzte Geometrie Größen bei realen Fluiden ergibt die kritischen Reynolds-Zahlen für die Plattenströmung und für die Rohrströmung. Die Hysterese der Instabilität wird begründet.

Die Existenz einer periodischen Abfolge von Wirbeln ist aus Beobachtungen in der Praxis bekannt. Wirbel und Wirbelhülle sind ein zusammenhängendes geometrisches Gebilde, das sich mit einer einheitlichen Geschwindigkeit bewegt. In diesem Gebilde gibt es lokal die Drehbewegung eines Wirbels und die Bewegung des Fluidelements auf der Bahn der Wirbelhülle.

Die Geschwindigkeit innerhalb der Wirbelhülle ist als Mittelwert zu verstehen. In der Realität wird die Wirbelhülle nicht überall gleiche Dicke haben. Eine präzisere Ermittlung der geometrischen Struktur des zusammenhängende Gebildes Wirbel und Wirbelhülle soll in zukünftigen Arbeiten erfolgen.

Es existieren vor dem Wirbel mit Sicherheit Bereiche in welchen das Zentrifugal-Drehmoment größer als das Reib-Drehmoment werden kann. Diese Aussage sollte auch unabhängig von dem hier vorgestellten sehr groben Modellansatz gemacht werden können.

Die hier vorgestellte Modellierung basiert auf der Anpassung eines kartesischen Fluidelements an eine gekrümmte Bewegung. Eine erfolgreiche Anpassung von Variablen an das zu behandelnde Problem gibt es auch bei der Analyse von elektronischen LC-Ozillatoren. Der sinusförmige Verlauf der Zustandsgrößen Spannung und Strom wird dabei über eine Variablentransformation in ein Differenzialgleichungssystem von entsprechenden Mittelwerten der Amplituden überführt [Lit. Mathis].

Referenzen

[Lit. Budo]

Budo, A.: Theoretische Mechanik, VEB-Verlag Berlin 1963

[Lit. Eck]

Eck, Bruno: Technische Strömungslehre, 8. Auflage, Berlin; Heidelberg, Springer, 1986

[Lit. Brommundt]

Brommundt, E.: Mechanik für Elektrotechniker, Teil 1 und 2, Vorlesungsskript Technische Universität Braunschweig 1976

[Lit. Sigloch]

Sigloch, Herbert: Technische Fluidmechanik, 4. Auflage, Berlin; Heidelberg, Springer, 2003

[Lit. Oertel]

Oertel, Herbert und Delfs, Jan: Strömungsmechanische Instabilitäten, Berlin; Heidelberg, Springer, 1996

[Lit. Hof]

Hof, Björn: Die Lösung eines alten Rätsels: Der kritische Punkt der Rohrströmung
Resolving Reynolds riddle: the critical point of pipe flow,
Forschungsbericht 2012 - Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation

[Lit. Mathis]

Mathis, W; B. Voigt: Applications of Lie Series Averaging in Nonlinear Oscillation.
Proc. IEEE Intern. Symp. Circ. Syst., Philadelphia 1987

Prof. Dr. Burkhard Voigt

Hochschule Mannheim, den 1. März 2018

Mail: b.voigt@hs-mannheim.de